Co-integração, equilíbrio de longo prazo, mecanismo de correcção dos erros e metodologia de Johansen

João Sousa Andrade [1]
GEMF - FEUC
www2.fe.uc.pt/~jasa

[1] Agradeço as correcções e comentários da Teresa Pereira.

Comecemos por apresentar o significado económico de relação, ou vector, de co-integração, através de alguns exemplos. Passaremos depois à obtenção de relações de equilíbrio de longo prazo, à ausência de significado em alguns casos e à equivalência entre os processos que envolvem um mecanismo de correcção dos erros e a co-integração. Apresentaremos o método de Engle-Granger para cálculo da relação de co-itegração e faremos a sua crítica. O que nos conduzirá à metodologia de Johansen. Na exposição do seu método veremos também como podemos impor algumas restrições às relações de co-integração e aos vectores de ajustamento e testá-las.

Exemplos económicos de relações de equilíbrio de curto e longo prazo

A utilização da ideia de equilíbrio e ajustamento de curto prazo aos valores de equilíbrio de longo prazo é, por sinal, bastante frequente em economia. Vejamos pois alguns exemplos.

<u>Procura de moeda</u>. A ideia de uma detenção de encaixes monetários no sentido de posse de um *buffer stock* levou a modelar a procura de moeda em termos de comportamentos de equilíbrio e de ajustamento ao equilíbrio.

$$\begin{aligned}\Delta M_t = \beta_0 + \lambda(M_{t-1} - \beta_1 \cdot Yr_{t-1} - \beta_2 \cdot P_{t-1} - \beta_3 \cdot r_{t-1}) + \alpha_1(L)\Delta M_{t-1} + \alpha_2(L)\Delta Yr_{t-1} + \\ + \alpha_3(L)\Delta P_{t-1} + \alpha_4(L)\Delta r_{t-1}\end{aligned}$$

As variáveis estão transformadas em logaritmos. Nesta formulação temos a conciliação da dinâmica de curto e longo prazos. Os polinómios $\alpha_k(L)$ são polinómios de desfasamentos de ordem k.

<u>Função consumo</u>. A separação entre a componente permanente e transitória do consumo pode levar-nos à seguinte formulação:

$$\Delta C = \beta_0 + \lambda(C - \beta_p Y)_{-1} + a_1(L)\Delta C_{-1} + a_2(L)\Delta Y_{-1}$$

Um dos primeiros trabalhos a utilizar a ideia da co-integração e os ajustamentos de curto prazo envolveu precisamente a função consumo para o Reino Unido.

Eficiência em mercados cambiais. Continuamos a utilizar logaritmos. Seja f_t a cotação a prazo (forward) de uma divisa e s_t o seu valor à vista (spot). Se E_t representar o valor esperado de uma variável em t, podemos fazer:

$$E_t s_{t+1} = f_t$$

E de acordo com a formulação racional das expectativas:

$$s_{t+1} - E_t s_{t+1} = \varepsilon_t$$

onde ε tem as características de um ruído branco.

Podemos, assim, testar a hipótese de eficiência estudando a relação de equilíbrio

$$s_{t+1} = f_t + \varepsilon_{t+1}$$

que pode ser integrada numa outra que se refira explicitamente aos ajustamentos de curto prazo.

Paridade do poder de compra. Da mesma forma, a paridade do poder de compra na determinação das taxas de câmbio pode ser testada pela relação

$$s_t + p_t^* - p_t = \varepsilon_t$$

onde p se refere aos preços internos e p* aos preços externos e onde as variáveis estão em logaritmos. Esta formulação é adequada na medida em que a respectiva teoria nunca defendeu a sua verificação no curto prazo, surgindo mais como uma restrição de longo prazo às relações entre taxas de câmbio.

Despesas do Estado. As despesas do Estado também podem ser modeladas procurando ter em conta um comportamento de longo prazo à *Wagner* e uma dinâmica de curto prazo:

$$\Delta G = \beta_0 + \lambda(G - \beta_G Y)_{-1} + a_1(L)\Delta G_{-1} + a_2(L)\Delta Y_{-1} \ .$$

O coeficiente λ representa, em equações deste tipo, a velocidade de ajustamento ao equilíbrio. Se num sistema deste tipo em que para os ajustamentos das suas variáveis tivéssemos os coeficientes λ_G e λ_Y e se o segundo fosse nulo, então poderíamos defender que G não determinava Y. Os afastamentos da relação de longo prazo não afectavam esta variável e, por isso, G não causaria Y.

As ideias aqui lembradas levam-nos ao tema económico do equilíbrio e ao econométrico da co-integração. E será com essa ideia que iremos fazer o estudo da co-integração.

Equilíbrio e dinâmica de desequilíbrio. Equivalência do m.c.e. e da co-integração.

A nossa ideia de equilíbrio e de erro de equilíbrio leva-nos a definir

equilíbrio, como $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}_t = 0$ e erro de equilíbrio, como $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{e}_t$

onde $\boldsymbol{e}_t$ tem as características de ruído branco normais.

As variáveis pertencentes ao vector $\boldsymbol{x}$ são variáveis co-integradas de ordem *d*, *b* se forem integradas de ordem *d* e se existir uma combinação linear entre elas que seja integrada de ordem *d-b*, com *b* positivo:

$$\boldsymbol{x}_t \sim CI(d, b)$$
$$x_{it} \sim I(d)$$
$$\exists \boldsymbol{\beta} \,:\, \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}_t \sim I(d-b), b > 0$$

O vector $\boldsymbol{\beta}$ é designado por vector de co-integração e, para nós, representa o vector de equilíbrio de longo prazo das variáveis económicas. A nossa exigência é assim dupla: 1º queremos o significado económico e 2º o respeito pelas características econométricas.

A primeira observação a fazer refere-se à propriedade de homogeneidade, à qual os economistas também se habituaram: se $\boldsymbol{\beta}$ é um vector de co-integração, $\boldsymbol{c}.\boldsymbol{\beta}$, também é vector de co-integração, sendo $\boldsymbol{c}$ um escalar.

Vejamos um resultado interessante sobre o comportamento conjunto de duas variáveis que afinal nada nos diz sobre o seu relacionamento mútuo.

Stock e Watson(1988) provaram que se duas variáveis *I(1)* forem *CI(1,1)*, então possuem a mesma tendência estocástica a um factor de proporcionalidade. Tomemos *y* e *z*.

$$y_t = \mu_{yt} + \varepsilon_{yt} : \mu - \text{random walk}$$
$$z_t = \mu_{zt} + \varepsilon_{zt} : \varepsilon - \text{var. estacionária}$$

Suponha-se que *y,z ~CI(1,1)*

então podemos supor uma combinação linear daquelas variáveis que é estacionária

$$\begin{aligned}
\beta_1 \cdot y_t + \beta_2 \cdot z_t &\sim I(0) \\
&= (\beta_1 \cdot \mu_{yt} + \beta_2 \cdot \mu_{zt}) + (\beta_1 \cdot \varepsilon_{yt} + \beta_2 \cdot \varepsilon_{zt}) \\
&\Rightarrow (\beta_1 \cdot \mu_{yt} + \beta_2 \cdot \mu_{zt}) = 0 \\
&\Rightarrow \mu_{yt} = -\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \mu_{zt}
\end{aligned}$$

Se a equação do seu relacionamento é estacionária então temos aquela igualdade em termos das respectivas tendências estocásticas.

Repetindo os cálculos com as igualdades encontradas, chegamos a

$$\begin{aligned}
y_t + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot z_t &= \mu_{yt} + \varepsilon_{yt} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \mu_{zt} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \varepsilon_{zt} \\
&= \varepsilon_{yt} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \varepsilon_{zt} \sim I(0)
\end{aligned}$$

c.q.d..

Vemos pois que y e z possuem a mesma tendência a um factor de proporcionalidade.

Procuremos agora comparar um sistema de ajustamento baseado no princípio de correcção dos erros com um outro baseado numa relação de co-integração, utilizando duas variáveis (y e z) com o mesmo número de desfasamentos nas equações em primeiras diferenças.

Tomemos pois um sistema com duas variáveis integradas de ordem um [y, x~I(1)] e limitemos a um os desfasamentos a introduzir nas equações de ajustamento de curto prazo

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= \beta_{10} + \lambda_1 \cdot (y_{t-1} - \beta_{11} \cdot z_{t-1}) + \beta_{12} \cdot \Delta y_{t-1} + \beta_{13} \cdot \Delta z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \\
\Delta z_t &= \beta_{20} + \lambda_2 \cdot (y_{t-1} - \beta_{21} \cdot z_{t-1}) + \beta_{22} \cdot \Delta y_{t-1} + \beta_{23} \cdot \Delta z_{t-1} + \varepsilon_{zt}
\end{aligned}$$

Este sistema pode tomar uma forma diferente, mas equivalente

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \beta_{10} + \lambda_1 \cdot y_{t-1} - \lambda_1 \cdot \beta_{11} \cdot z_{t-1} + \beta_{12} \cdot \Delta y_{t-1} + \beta_{13} \cdot \Delta z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \\ \Delta z_t &= \beta_{20} + \lambda_2 \cdot y_{t-1} - \lambda_2 \cdot \beta_{21} \cdot z_{t-1} + \beta_{22} \cdot \Delta y_{t-1} + \beta_{23} \cdot \Delta z_{t-1} + \varepsilon_{zt}\end{aligned}$$

Se atendermos a que podemos representar por vectores e matrizes os seguintes parâmetros

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 \cdot \beta_{11} \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \cdot \beta_{21} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{22} & \beta_{23} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \qquad \boldsymbol{m}_0 = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_t$$

Então podemos condensar aquele sistema

$$\boldsymbol{\Delta x}_t = \boldsymbol{m}_0 + \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{\Delta x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

ou ainda

$$\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} = \boldsymbol{\Delta x}_t - \boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{\Delta x}_{t-1} - \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Sendo para o caso geral de p desfasamentos

$$\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} = \boldsymbol{\Delta x}_t - \boldsymbol{m}_0 - \sum_{j=2}^{p} \boldsymbol{M}_j \cdot \boldsymbol{\Delta x}_{t-j+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

No membro direito encontramos uma combinação linear entre variáveis estacionárias pelo que a característica de estacionaridade está assegurada. E esta característica de estacionaridade do membro direito garante a estacionaridade do membro esquerdo. Se tivermos $\boldsymbol{M}_1$=0, então temos um modelo VAR com variáveis estacionárias. No caso geral $\boldsymbol{M}_1 \neq 0$, sendo a esta situação que aplicamos as nossas ideias de equilíbrio e de afastamento do equilíbrio.

Como temos

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_{t-1} \sim I(0)$$

e sabendo que cada uma das variáveis $\boldsymbol{x}$, (y e z), é integrada de ordem um

$$\boldsymbol{x} \sim I(1),$$

podemos afirmar que estamos perante variáveis co-integradas

$$\boldsymbol{x} \sim CI(1,1).$$

Este resultado significa que a representação em termos de mecanismo de correcção dos erros é equivalente à representação em termos de variáveis co-integradas. Falamos afinal do mesmo, num e noutro caso.

Obtenção das relações de co-integração.

Comecemos por apresentar a metodologia de *Engle-Granger*. A apresentação seguirá os diferentes passos que constam dessa metodologia.

1. Supomos que as variáveis y e z são variáveis I(1).

2. Sendo assim podemos fazer:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot z_t + \varepsilon_t$$

procurando obter valores dos erros que sejam estacionários. Se, porventura, esses erros $\hat{\varepsilon}_t$ apresentarem uma raiz unitária, as variáveis não são co-integradas. Como esta nova variável é obtida pela regressão acima, *Engle e Granger*(1987) calcularam as tabelas apropriadas para aquele teste de raiz unitária para o caso de duas variáveis e *Engle e Yoo*(1987) para o caso de mais de duas variáveis.

3. Se y e z ~CI(1,1), então podemos estimar o sistema

$$\Delta y_t = \alpha_{11}(y_{t-1} - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot z_{t-1}) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_{12}(i)\Delta y_{t-i} + \sum_{j=1}^{k_2} \alpha_{13}(j)\Delta z_{t-j} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta z_t = \alpha_{21}(y_{t-1} - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot z_{t-1}) + \sum_{i=1}^{k_3} \alpha_{22}(i)\Delta y_{t-i} + \sum_{j=1}^{k_4} \alpha_{23}(j)\Delta z_{t-j} + \varepsilon_{2t}$$

Não esquecendo que $\widehat{\beta_0}$ e $\widehat{\beta_1}$ já foram estimados acima.

4. Um problema que deve ser resolvido é, obviamente, o da auto-correlação que poderá estar presente naquelas equações. O remédio consiste na dinamização adequada do modelo. Não esqueçamos também que os erros de uma das equações podem estar correlacionados com os erros da outra equação, se admitirmos efeitos contemporâneos entre Δz e Δy.

Os parâmetros α_{11} e α_{21} medem as velocidades de ajustamento das variáveis ao equilíbrio. Não faz sentido que estes valores sejam muito elevados. Se porventura α_{21} for nulo, podemos concluir que a variável y não exerce influência sobre z.

Este processo, em vários passos, está sujeito a algumas críticas:

- Num modelo a duas variáveis que erros tomar: os de *y(z)* ou *z(y)* ? Sabemos que para um número infinito de observações é indiferente um ou outro começo, mas em economia não temos observações infinitas.
- Os problemas complicam-se com três ou mais variáveis. Este método não fornece uma metodologia precisa para estes casos.
- E, como em todos os processos em dois passos, os erros introduzidos no primeiro passo, logicamente que ficam presentes no segundo.

Hoje, não é muito complicado resolver algumas das questões postas pelas críticas à resolução (simplificada) daqueles processos não lineares. Por métodos não lineares podemos estimar directamente o sistema acima, num único passo. Mas obviamente que não respondemos à questão da complexidade com três e mais variáveis. Felizmente que o método de *Johansen*(1988), de máxima verosimilhança, resolve com eficácia todos estes problemas.

Co-integração à Johansen

Tomemos um processo de raiz unitária do tipo

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

ao qual podemos dar a seguinte configuração

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &= (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &= \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{aligned}$$

A característica de $\boldsymbol{\Pi}$ dar-nos-á o número de vectores de co-integração presentes entre as variáveis do vector $\boldsymbol{x}$.

No caso extremo dessa característica ser nula,

$$r(\boldsymbol{\Pi}) = 0,$$

não teremos vectores co-integrados.

A expressão acima pode tomar a forma geral

$$\Delta \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

onde, no caso de $\boldsymbol{A}_0$ ser diferente de zero, temos a presença de tendências temporais nas variáveis do vector $\boldsymbol{x}$.

Suponhamos que a característica daquela matriz é igual à unidade. Neste caso, temos um vector de co-integração e, como já recordámos atrás, todos os outros vectores possíveis limitam-se a combinações lineares deste. Vejamos como podemos representar o sistema acima condensado

$$\begin{aligned}
\Delta x_{1t} &= \Pi_{11} \cdot x_{1t-1} + \Pi_{12} \cdot x_{2t-1} + \ldots + A_{01} + \varepsilon_{1t} \\
\Delta x_{2t} &= s_2 \cdot (\Pi_{11} \cdot x_{1t-1} + \Pi_{12} \cdot x_{2t-1} + \ldots) + A_{02} + \varepsilon_{2t} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta x_{kt} &= s_k \cdot (\Pi_{11} \cdot x_{1t-1} + \Pi_{12} \cdot x_{2t-1} + \ldots) + A_{0k} + \varepsilon_{kt}
\end{aligned}$$

No caso específico de $A_{0j} = s_j \cdot A_{01}$, a constante passa para dentro do parêntesis, o que leva a retirar dos níveis das variáveis $\boldsymbol{x}$ o comportamento de tendência temporal.

Tomemos um processo auto-regressivo de ordem *p* para *k* variáveis

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_p \cdot \boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

a subtracção de $\boldsymbol{x}_{t-1}$ de cada membro conduz-nos a

$$\Delta\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_p \cdot \boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

se agora somarmos e subtrairmos $(\boldsymbol{A}_1\text{-}\boldsymbol{I}).\boldsymbol{x}_{t-2}$ chegamos a

$$\Delta\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I}) \cdot \Delta\boldsymbol{x}_{t-1} + (\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_p \cdot \boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

se continuarmos e somarmos e subtrairmos $(\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_1\text{-}\boldsymbol{I}).\boldsymbol{x}_{t-3}$

$$\Delta \boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I}) \cdot \Delta \boldsymbol{x}_{t-1} + (\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I}) \cdot \Delta \boldsymbol{x}_{t-2} + (\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x}_{t-3} + \ldots$$
$$+ \boldsymbol{A}_p \cdot \boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

e finalmente se generalizarmos obtemos

$$\Delta \boldsymbol{x}_t = \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Pi}_i \cdot \Delta \boldsymbol{x}_{t-i} + \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

onde

$$\boldsymbol{\Pi} = -(\boldsymbol{I} - \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{A}_i)$$

e

$$\boldsymbol{\Pi}_i = -(\boldsymbol{I} - \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{A}_j)$$

A característica de $\boldsymbol{\Pi}$ dá-nos o número de vectores de co-integração. No caso de ser nula, estamos perante um VAR normal. Se tivermos o valor k, idêntico ao número das variáveis do modelo, então o vector das variáveis é estacionário e se tivermos um valor entre um e k, teremos esse número de vectores independentes de co-integração.

O valor da característica daquela matriz é o número de valores próprios associados à matriz que são diferentes de zero. Sabemos que os valores de λ_i se obtêm da resolução de $|\boldsymbol{\Pi}\text{-}\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{I}|=0$ e uma raiz nula implica que $|\boldsymbol{\Pi}|$ seja nulo, pelo que pelo menos uma fila seja não independente das restantes. Tomemos λ_i como representando o valor próprio i e ordenemos os diferentes valores próprios por ordem decrescente

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_k$$

Se a característica for nula, todos os λ_i serão nulos ou, de outra forma mais útil,

$$ln(1-\lambda_i)=0.$$

Se a característica for igual à unidade, $0<\lambda_1<1$, e assim

$$ln(1-\lambda_1)<0,$$

sendo

$$ln(1-\lambda_j)=0,$$

para todas os outros valores próprios.

O problema que temos de resolver é saber quantos valores próprios são diferentes de zero, ou quantos obedecem à condição

$$(1-\lambda_i) \neq 1.$$

Dois testes são propostos para responder a tal questão. O primeiro vem dado por

$$\lambda_{traço}(r) = -T \cdot \sum_{i=r+1}^{k} \ln(1-\hat{\lambda}_i)$$

- que testa a H_0 de o número de vectores de co-integração distintos serem em número inferior ou iguais a *r*. Quanto mais afastados de zero estiverem os $\hat{\lambda}_i$ mais elevado será o valor daquela estatística.

O segundo teste é dado por

$$\lambda_{\max}(r, r+1) = -T \cdot \ln(1-\hat{\lambda}_{r+1})$$

- que testa a H_0 de o número de vectores de co-integração ser *r* contra a hipótese alternativa de *r+1*.

Por simulação, diversos autores obtiveram tabelas para aquelas estatísticas. Nomeadamente *Osterwald-Lenum*(1992), *Johansen e Joselius*(1990) e *Bent Nielsen*.

Alguns testes na relação de co-integração

Devido à sua importância devemos começar por fazer o teste de exclusão de uma constante no vector de co-integração contra a sua não presença, ou não restrição da constante. Estimemos o modelo para os dois casos. Designemos por $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_k$ os valores próprios associados à não restrição da constante e por $\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, ..., \hat{\lambda}_k^*$ os valores associados à integração da constante no vector de co-integração. Assimptoticamente, temos a estatística

$$-T \cdot \sum_{i=r+1}^{k} \left[\ln(1-\hat{\lambda}_i^*) - \ln(1-\hat{\lambda}_i) \right] \sim \chi^2_{(k-r)}$$

onde *r* foi previamente retido.

Os valores reduzidos da expressão devem levar-nos a incluir a constante no vector de co-integração. Ou, de outra forma, se $\chi^2_{(k-r)} > \chi^{2^c}_{(k-r)}$ devemos recusar a constante no vector de integração e admitir a presença de tendência temporal nas variáveis em estudo.

Vejamos como também podemos impor outras restrições às relações de co-integração. Apresentamos assim alguns testes que envolvem certos valores dos parâmetros. Tomemos

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}'$$

onde $\boldsymbol{\beta}_{(kxr)}$ é uma matriz de parâmetros de co-integração e $\boldsymbol{\alpha}_{(kxr)}$ se compõe dos pesos com que cada vector de co-integração entra nas equações do VAR, ou seja, temos aqui os valores das velocidades de ajustamento.

Podemos pois a partir de

$$\Delta \boldsymbol{x}_t = \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Pi}_i \cdot \Delta \boldsymbol{x}_{t-i} + \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

obter

$$\Delta \boldsymbol{x}_t = \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Pi}_i \cdot \Delta \boldsymbol{x}_{t-i} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

O que, para r=1, e normalizando para a primeira variável $\beta_0 = 1$, nos permite fazer

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

As restrições que pretendamos impor em α e β têm um tratamento idêntico às anteriores. Tomemos os valores próprios do modelo não restringido $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_k$ e os novos valores associados à restrição imposta $\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, \ldots, \hat{\lambda}_k^*$. Assimptoticamente, temos a estatística

$$T \cdot \sum_{i=1}^{r} \left[\ln(1 - \hat{\lambda}_i^*) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i) \right] \sim \chi^2_{(\text{restrições em } \beta \text{ ou } \alpha)}$$

que segue a chi-quadrado com graus de liberdade iguais às restrições impostas.

Exemplifiquemos com um modelo de procura de moeda. Se estivermos interessados em testar se a elasticidade preço é, no longo prazo, igual à unidade, devemos fazer aquele teste e se, porventura, o valor obtido daquela estatística for inferior ao seu valor crítico, $\chi_1^2 < \chi_1^{2^c}$, aceitamos a restrição ! Da mesma forma devemos fazer para α. Não esquecendo que um valor da estatística superior ao seu valor crítico leva à recusa da restrição imposta. Tenhamos também em atenção que os testes em α são verdadeiros testes sobre exogeneidade.

Exemplificação da obtenção de relações de co-integração no RATS

A econometria baseada na análise das raízes unitárias, da característica de estacionaridade, e de relações de co-integração revolucionou os anteriores conhecimentos, pelo que é importante o seu estudo por parte dos economistas.

As observações que aqui serão feitas não eliminam o estudo do manual "Cats in RATS Version 1.00" e que se destina a apresentar a metodologia e o programa CATS in RATS, (*Cointegration Analysis of Time Series*), da autoria de *Henrik Hansen* e de *Katarina Juselius*.

O procedimento para a CI à *Johansen* começou por ser distribuído com o RATS e era da autoria de *K. Juselius*. Mais tarde, a sua designação passou a ser a actual, CATS, da autoria de *H. Hansen* e a estar disponível na Internet. Finalmente passou a ser vendido à parte do RATS pela empresa sua proprietária. Sempre que fizermos referência ao directório "c:\cats" referimo-nos a esta última versão. Se tivermos "c:\oldcat", então trata-se do penúltimo procedimento. Este difere do mais actual por um resultado diferente na opção "rank", para o primeiro tipo de vector de CI.

As instruções e resultados que se seguem demonstram uma forma possível de estudo da presença de CI entre várias variáveis. Obviamente que não esgotam as possibilidades de cálculos e testes que são possíveis utilizando directamente os comandos da nova janela do RATS e que é designada por CATS.

```
cal 60 1 4
all 0 97:4
open data c:\oecd\usaoecd.rat
data(format=rats) / usargdps usadefls usam1 usafedfu
set q = usargdps
set p = usadefls
set m = usam1
set r = usafedfu
log q
log p
log m
log r
source(noecho) c:\oldcat\catsmain.src
open copy c:\temp\exp.out
@cats(proc=rank,lags=4,season=4) 1961:1 1997:4
```

```
# m q p r
# 'moeda' 'produto' 'preþos' 't_juro'
end 1
***************************************
cal 60 1 4
all 0 97:4
open data c:\oecd\usaoecd.rat
data(format=rats) / usargdps usadefls usam1 usafedfu
set q = usargdps
set p = usadefls
set m = usam1
set r = usafedfu
log q
log p
log m
log r
*                              Vamos apenas tomar um vector de CI
source(noecho) c:\cats\catsmain.src
*  1 modelo: sem qualquer elemento deterministico, o que é muito forte
* depois de fazer os testes desejados abandone o CATS escolhendo a opção CATS - QUIT
@cats(batch,dettrend=none,lags=4,season=4,rec) 1960:1 1997:4
# m q p
I(1) ANALYSIS
Eigenv.    L-max   Trace   H0: r     p-r L-max90 Trace90
0.2570   43.96   51.61       0       3   11.23   21.58
0.0483    7.33    7.65       1       2    7.37   10.35
0.0022    0.32    0.32       2       1    2.98    2.98
BETA (transposed)
M       Q       P
  -5.844   2.172   5.021
 -10.971   1.822  12.663
  -1.578   1.244  -0.430
ALPHA
   0.003   0.002   0.000
   0.003  -0.001   0.000
   0.001   0.000   0.000
PI
M       Q       P
  -0.037   0.010   0.037
  -0.011   0.006   0.007
  -0.004   0.002   0.002
Re-normalisation of the eigenvectors
EIGENVECTOR(S) (transposed)
M         Q         P
  -5.8436   2.1724   5.0208
The matrices based on 1 cointegration vectors
BETA (transposed)
    M         Q         P
     1.000    -0.372    -0.859
ALPHA                    T-VALUES FOR ALPHA
DM            -0.019       -4.348
DQ            -0.020       -5.140
DP            -0.007       -2.629
```

```
PI
         M        Q        P
DM           -0.019     0.007     0.017
DQ           -0.020     0.007     0.017
DP           -0.007     0.003     0.006
T-VALUES FOR PI
             -4.348     4.348     4.348
             -5.140     5.140     5.140
             -2.629     2.629     2.629
***********************************************************************
*  2 modelo: a constante fica no espaço de CI
* depois de fazer os testes desejados abandone o CATS escolhendo a opção CATS - QUIT
@cats(batch,dettrend=cimean,lags=4,season=4,rec) 1960:1 1997:4
# m q p r
I(1) ANALYSIS
Eigenv.   L-max   Trace   H0: r     p-r L-max90 Trace90
0.2953   51.79   84.56      0      4   18.03   49.91
0.1092   17.11   32.77      1      3   14.09   31.88
0.0712   10.93   15.66      2      2   10.29   17.79
0.0314    4.73    4.73      3      1    7.50    7.50
BETA (transposed)
M       Q       P       R       CONSTANT
 -11.707  12.549   6.585  -0.904 -55.620
  -0.575 -10.360   7.217  -2.913  65.752
 -19.063  19.396  13.099  -3.938 -93.848
  -5.239  -8.225  11.561   0.555  53.369
ALPHA
   0.003   0.000   0.002   0.001
   0.002   0.002   0.000   0.000
   0.002  -0.001   0.000   0.000
  -0.015   0.002   0.017  -0.014
PI
M       Q       P       R       CONSTANT
  -0.066   0.063   0.045  -0.007  -0.286
  -0.031   0.014   0.031  -0.010  -0.024
  -0.020   0.038   0.000   0.001  -0.196
  -0.075   0.235  -0.024  -0.068  -1.369
Re-normalisation of the eigenvectors
EIGENVECTOR(S) (transposed)
M        Q         P         R          CONSTANT
 -11.7071  12.5488   6.5852  -0.9035 -55.6196
The matrices based on 1 cointegration vectors
BETA (transposed)
    M         Q         P         R          CONSTANT
    1.000    -1.072    -0.562     0.077      4.751
ALPHA                    T-VALUES FOR ALPHA
DM           -0.030       -3.613
DQ           -0.027       -3.648
DP           -0.025       -5.008
DR            0.172        1.698
PI
         M        Q        P         R          CONSTANT
DM           -0.030     0.032     0.017    -0.002    -0.143
```

DQ   -0.027   0.029   0.015   -0.002   -0.129
DP   -0.025   0.027   0.014   -0.002   -0.118
DR   0.172   -0.185   -0.097   0.013   0.818
T-VALUES FOR PI
-3.613   3.613   3.613   -3.613   -3.613
-3.648   3.648   3.648   -3.648   -3.648
-5.008   5.008   5.008   -5.008   -5.008
1.698   -1.698   -1.698   1.698   1.698
****
* 3 modelo: a constante fica fora do espaþo de CI pelo que o trend nas var não está
* na relação de CI
* depois de fazer os testes desejados abandone o CATS escolhendo a opção CATS - QUIT
@cats(batch,dettrend=drift,lags=4,season=4,rec) 1960:1 1997:4
m q p r
I(1) ANALYSIS

Eigenv.	L-max	Trace	H0: r	p-r	L-max90	Trace90
0.1892	31.04	54.26	0	4	17.14	43.84
0.1008	15.72	23.22	1	3	13.39	26.70
0.0317	4.77	7.50	2	2	10.60	13.31
0.0183	2.73	2.73	3	1	2.71	2.71

BETA (transposed)

M	Q	P	R
-17.500	20.885	8.825	-1.179
10.453	-0.452	-13.208	4.331
-3.271	-10.852	10.399	0.977
-10.740	15.549	6.446	-2.567

ALPHA

0.003	-0.001	0.001	0.001
0.001	-0.002	0.000	0.000
0.002	0.001	0.000	0.000
-0.002	-0.009	-0.016	0.006

PI

M	Q	P	R
-0.066	0.063	0.045	-0.007
-0.031	0.014	0.031	-0.010
-0.020	0.038	0.000	0.001
-0.075	0.235	-0.024	-0.068

Re-normalisation of the eigenvectors
EIGENVECTOR(S) (transposed)

M	Q	P	R
-17.5002	20.8852	8.8249	-1.1791

The matrices based on 1 cointegration vectors
BETA (transposed)

M	Q	P	R
1.000	-1.193	-0.504	0.067

ALPHA		T-VALUES FOR ALPHA
DM	-0.050	-4.059
DQ	-0.014	-1.235
DP	-0.031	-4.159
DR	0.033	0.218

PI

	M	Q	P	R
DM	-0.050	0.059	0.025	-0.003

```
DQ          -0.014     0.016     0.007    -0.001
DP          -0.031     0.036     0.015    -0.002
DR           0.033    -0.039    -0.017     0.002
T-VALUES FOR PI
          -4.059     4.059     4.059    -4.059
          -1.235     1.235     1.235    -1.235
          -4.159     4.159     4.159    -4.159
           0.218    -0.218    -0.218     0.218
*************************************************************************
*  4 modelo: admitimos trends nas var e na relação de CI
* depois de fazer os testes desejados abandone o CATS escolhendo a opção CATS - QUIT
@cats(batch,dettrend=cidrift,lags=4,season=4,rec) 1960:1 1997:4
# m q p r
I(1) ANALYSIS
Eigenv.   L-max   Trace   H0: r     p-r L-max90 Trace90
0.2073   34.37   63.94      0       4   19.88   58.96
0.1018   15.89   29.56      1       3   16.13   39.08
0.0593    9.05   13.68      2       2   12.39   22.95
0.0308    4.63    4.63      3       1   10.56   10.56
BETA (transposed)
M       Q       P       R         TREND
  13.780 -34.892 -12.348   2.030   0.206
  12.303   4.242 -11.992   3.910  -0.078
   5.467  36.822   9.814  -3.829  -0.467
  -4.329  -2.769  12.802   0.021  -0.067
ALPHA
  -0.003  -0.001   0.001   0.001
   0.000  -0.002   0.000   0.000
  -0.002   0.001   0.000   0.000
  -0.003  -0.007   0.018  -0.012
PI
M       Q       P       R         TREND
  -0.053   0.127   0.064  -0.011  -0.001
  -0.036  -0.008   0.024  -0.008   0.000
  -0.016   0.055   0.005   0.000   0.000
   0.033   0.771   0.133  -0.101  -0.008
Re-normalisation of the eigenvectors
EIGENVECTOR(S) (transposed)
M         Q         P         R           TREND
  13.7799 -34.8915 -12.3484   2.0303   0.2059
The matrices based on 1 cointegration vectors
BETA (transposed)
    M         Q         P         R            TREND
     1.000    -2.532    -0.896     0.147     0.015
ALPHA                    T-VALUES FOR ALPHA
DM          -0.044       -4.597
DQ          -0.007       -0.783
DP          -0.025       -4.273
DR          -0.038       -0.319
PI
          M         Q         P         R            TREND
DM          -0.044     0.111     0.039    -0.006    -0.001
DQ          -0.007     0.017     0.006    -0.001     0.000
```

```
DP          -0.025    0.062    0.022   -0.004    0.000
DR          -0.038    0.096    0.034   -0.006   -0.001
T-VALUES FOR PI
           -4.597    4.597    4.597   -4.597   -4.597
           -0.783    0.783    0.783   -0.783   -0.783
           -4.273    4.273    4.273   -4.273   -4.273
           -0.319    0.319    0.319   -0.319   -0.319
***********************************************************************

*
* Cuidados a ter em todos os modelos aqui obtidos:
*          - análise dos resíduos com alterações do número de desfamentos
*            se tal se justificar
* As restrições sobre os valores das elasticidades no espaço de CI levam-nos a
*          - uma restrição, ou para os preços ou produto, para a qual a matriz
*            dos betas transp adequada é a seguinte:
*             1  0 -1  0    ou  1 -1  0  0
*             0  1  0  0        0  0  1  0
*             0  0  0  1        0  0  0  1
*          - duas restrições, para preços e quantidades, e então teremos:
*             1 -1 -1 0
*             0  0  0 1
* Mesmo que não possamos excluir as restrições devido ao valor da estatística não devemos
*          - esquecer a coerência do modelo que daí resulta.
*
***********************************************************************
```

Parte inicial da execução do procedimento CATS com opções úteis para execução

```
/*

                      CATS for RATS
                       March 1995
           Henrik Hansen, Soren Johansen, Katarina Juselius
****************************************************************************
    SYNTAX :
     @CATS(OPTIONS) START END
     # < ENDOGENOUS VARIABLES >
     # < EXOGENOUS  VARIABLES >          * OPTIONAL WITH EXO
     # < DUMMY SERIES >                  * OPTIONAL WITH DUM

     OPTIONS:
     LAGS= INTEGER [2]                   * LAGS IN VAR-MODEL
     DETTREND= NONE/CIMEAN/[DRIFT]/CIDRIFT * TREATMENT OF CONSTANT
     SEASON= INTEGER [0]                 * CENTERED SEASONAL DUMMIES
     EXO/[NOEXO]                         * INCLUSION OF EXOGENOUS I(1)
     DUM/[NODUM]                         * CONDITIONING ON DUMMY SERIES
     PROC= RANK/TSPROP/[I1]              * PROCEDURES
```

```
    TABLES/[NOTABLES]          * SHOW THE TABLES OF CRITICAL V.
    [MISC]/NOMISC              * INCLUDE MISC. PROCEDURES
    REC/[NOREC]                * INCLUDE THE RECURSIVE PROCEDURE
    GNAME= STRING [ ]          * ADD A PREFIX TO PLOT FILES
    BATCH/[NOBATCH]            * SWITCH FOR RUN IN EDITOR OR BATCH
*/
env noecho
env interactive nosubscripterrors
/*
CATS.SRC  95.03.23
The file is the main file for the procedure CATS.
Henrik Hansen, Søren Johansen, Katarina Juselius:  23. March 1995
*/
```